CONCOURS DE RECRUTEMENT

DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE

ET DES INGENIEURS TITULAIRES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 h 00
Coefficient : 4

PREMIER PROBLEME

I°) $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont n nombres complexes tels que $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$.

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont n nombres complexes.

Démontrer que s'il existe un polynôme P à une indéterminée, de degré au plus égal à n - 1 et vérifiant les égalités

$$P(s_1) = u_1,\ P(s_2) = u_2, \ldots,\ P(s_n) = u_n\ ,$$

alors ce polynôme est unique.

Considérant la décomposition en éléments simples de la fraction

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-s_1)(z-s_2)\ldots(z-s_n)}\ ,$$

établir l'existence de P et le déterminer en fonction de

$$s_1, s_2, \ldots, s_n \text{ et de } u_1, u_2, \ldots, u_n.$$

Déterminer une condition sur les u_i et les s_i pour que le polynôme soit de degré effectif n-1.

2°) $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont k entiers tels que $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$.

Soient n nombres complexes $u_i^o, u_i^1, \ldots, u_i^{n_i-1}$, où i = 1,2,...k.

$s_1, s_2, \ldots, s_k$ sont k nombres complexes tels que $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$.

Démontrer que s'il existe un polynôme P à une indéterminée, de degré au plus égal à n-1 et vérifiant, pour i = 1,2,...,k, les égalités $P(s_i) = u_i^o$, $P^{(1)}(s_i) = u_i^1, \ldots,$ $P^{(n_i-1)}(s_i) = u_i^{n_i-1}$, où $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(n_i-1)}$ désignent les dérivées successives de P jusqu'à l'ordre n_i-1, alors ce polynôme est unique.

3°) On se place dans le cas particulier où $n_1=2$, $n_2=1$. s_1 étant différent de s_2, démontrer qu'il existe un polynôme P, du second degré au plus, vérifiant :

$$P(s_1) = u_1^o,\ P^{(1)}(s_1) = u_1^1,\ P(s_2) = u_2^o\ .$$

.../...

4°) On se place à nouveau dans les hypothèses du 2°).

On rappelle dans ces conditions, que si P existe, alors il existe également n constantes complexes A_j^r telles que :

$$\frac{P(z)}{(z-s_1)^{n_1}(z-s_2)^{n_2}\ldots(z-s_k)^{n_k}} = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{r=1}^{n_j}\frac{A_j^r}{(z-s_j)^r}\right)$$

a - Montrer qu'il existe n polynômes $Q_{j,r}$ à une indéterminée tels que

$$P(z) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{r=1}^{n_j} A_j^r \; Q_{j,r}(z)\right)$$

b - $Q_{j,r}^{(\ell)}$ désignant la dérivée d'ordre ℓ de $Q_{j,r}$, on pose par convention $Q_{j,r}^{(o)} = Q_{j,r}$ et $P^{(o)} = P$.

Pour $o \leqslant \ell \leqslant n_{j-1}$ montrer que : $Q_{j,n_j-\ell}^{(\ell)}(s_j) \neq o$

et que $P^{(\ell)}(s_j) = A_j^{n_j} Q_{j,n_j}^{(\ell)}(s_j) + A_j^{n_j-1} Q_{j,n_j-1}^{(\ell)}(s_j) + \ldots + A_j^{n_j-\ell} Q_{j,n_j-\ell}^{(\ell)}(s_j)$.

En déduire qu'il existe bien un polynôme P de degré au plus égal à n-1 qui satisfait aux hypothèses du 2°).

c - Exprimer $P^{(\ell)}(s_j)$ en fonction des valeurs en s_j de Q_{j,n_j} et des dérivées successives de ce dernier polynôme.

5°) Soit f une fonction à valeurs réelles, de la variable réelle x, développable en série entière sur l'intervalle ouvert I non réduit à x=o. On désigne par $f^{(\ell)}$ la dérivée d'ordre ℓ de f.

$s_1, s_2, \ldots, s_k$ sont des éléments de I tels que $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$.

P est le polynôme à une indéterminée, de degré au plus égal à n-1 qui, pour j=1,2,.., satisfait aux égalités

$$P(s_j) = f(s_j),\ P^{(1)}(s_j) = f^{(1)}(s_j),\ \ldots,\ P^{(n_j-1)}(s_j) = f^{(n_j-1)}(s_j),$$

où n_j vérifie, lorsque j prend les valeurs 1,2,...,k,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_j + \ldots n_k = n$$

.../...

a - Démontrer que la fonction g, définie sur l'ensemble $I - \{ s_1, s_2, \ldots, s_k \}$

par : $$g(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x-s_1)^{n_1} (x-s_2)^{n_2} \ldots (x-s_k)^{n_k}} ,$$

a une valeur qui tend vers une limite finie h_j lorsque x tend vers s_j.

b - Soit h la fonction définie sur I par :

. $h(x) = g(x)$, pour x élément de $I - \{ s_1, s_2, \ldots, s_k \}$

. $h(s_j) = h_j$, pour $j=1,2,\ldots,k$.

Démontrer que h est indéfiniment dérivable sur I.

Donner l'expression de la valeur de la dérivée première de h pour $x = s_1$ en fonction des valeurs de dérivées de f et de P d'ordres appropriés.

DEUXIEME PROBLEME

f étant une fonction de la variable réelle x à valeur complexe $f(x) = h(x) + i\, g(x)$, où h et g sont des fonctions dont les valeurs h (x) et g (x) sont réelles, on rappelle que par définition :

a) $$\frac{df}{dx} = \frac{dh}{dx} + i \frac{dg}{dx}$$

b) $$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta h(x)\, dx + i \int_\alpha^\beta g(x)\, dx,$$ α et β étant réels

I°) Soit $P(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x^{n-1}$ un polynôme à une indéterminée x et à coefficients réels.

Démontrer que :

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\, dx = -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta .$$

2°) En déduire, Q (x) étant un polynôme à une indéterminée x et à coefficients réels, les inégalités :

$$\int_0^1 (Q(x))^2\, dx \leqslant \int_0^{\pi} |Q(e^{i\theta})|^2\, d\theta ,$$

$$\int_0^1 (Q(x))^2\, dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} |Q(e^{i\theta})|^2\, d\theta .$$

3°) En déduire que si $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sont N réels non tous nuls, alors :

$$\sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a_m a_n}{m+n-1} \right) \leqslant \pi \sum_{n=1}^{N} a_n^2 .$$

.../...

4°) γ est un nombre réel tel que, quel que soit N et quels que soient les réels $u_1, u_2, \ldots, u_N$, soit vérifiée l'inégalité :

$$\sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{u_m u_n}{m+n-1} \right) \leqslant \gamma \sum_{n=1}^{N} u_n^2$$

On pose $u_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ et on décompose le carré $[1, N] \times [1, N]$ en carrés élémentaires dont les côtés ont l'unité pour longueur.

Démontrer que $\int_1^N \int_1^N \frac{dx\,dy}{(x+y)\sqrt{x\,y}} \leqslant \gamma \sum_{n=1}^{N} u_n^2$.

5°) Démontrer que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} < 1+\text{Log } N$.

Déduire alors de l'inégalité établie au 4°) que

$$\int_1^N \int_1^N \frac{dx\,dy}{(x+y)\sqrt{x\,y}} < \gamma + \gamma \text{ Log } N .$$

Démontrer enfin que $\gamma \geqslant \pi$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail